**Exercice 10**

(1) Montrer que $cotan(\theta) - 2cotan(2\theta) = tan(\theta)$.

(2) En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^k} \tan(\frac{\theta}{2^k})$ en fonction de $n$ et $\theta$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan(\frac{\theta}{2^k})$

**Exercice 11**

La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ est elle continue en tout $m \in \mathbb{Z}$?
On rappelle que $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

**Exercice 12**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}), \forall x \neq 0$, et $f(0) = 0$

(1) $f$ est elle continue en 0 ? Dérivable en 0 ?

(2) Sa dérivée f' est elle continue en 0 ?

**Exercice 13**

Soit la fonction $f$ telle que $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que la dérivée n-ième de f vérifie $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ où $P_n(x)$ est un polynôme vérifiant la relation : $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$.

**Exercice 14**

Etudier, puis représenter graphiquement la fonction $f$ telle que $f(x) = \frac{x^3 + |x|}{x^2 - |x|}$.

**Exercice 15**

Déterminer, suivant $n \in \mathbb{N}$, les réels a et b pour que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \frac{x^n + ax + b}{x^2 - 1}$ puisse être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Exercice 16**

Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1 + x^n}{(1+x)^n}$ où $n \in \mathbb{N} / n \geq 2$

(1) Montrer que $f$ atteint un minimum que l'on précisera.

(2) En déduire les inégalités :

(a) $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n), \forall x \in \mathbb{R}_+$

(b) $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n), \forall x, y \in \mathbb{R}_+$

**Exercice 17**

Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{n!}x^n(1 + x^n)$

**Exercice 18**

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.
Combien peut on ainsi former de groupes constitués :

(1) uniquement d'hommes

(2) au moins d'une femme et au moins d'un homme.

**Exercice 19**

Soient $A, B, C$ trois ensembles finis.

(1) Montrer que

$$card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$$

(2) Application : Une classe de l'ENSAE comporte 34 élèves. parmi eux : 26 sont matheux, 20 sont sportifs et 7 sont musiciens. Aucun élève ne déteste à la fois les mathématiques, le sport et la musique. De plus, 4 sont matheux musiciens, 15 matheux sportifs et 3 sont musiciens sportifs. Y a t-il un élève satifaisant les idéaux des Grecs, c'est à dire à la fois matheux, sportif et musicien ?

**Exercice 20**

Le bibliothécaire de l'ENSAE, après avoir codifié 4 livres de mathématiques, 6 livres de statistique et 5 livres d'économie, souhaite ranger ces documents sur une étagère.
De combien de façons peut il effectuer ce rangement :

(1) si les livres doivent être groupés par matières ?

(2) si les livres de mathématiques doivent être groupés ?

ENSAE (2020/2021)
TEST DE PRESELECTION AU CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS STATISTICIENS ECONOMISTES (CYCLE LONG) ET D'ANALYSTES STATISTICIENS - DURÉE = 3H

*La clarté de la rédaction ainsi que la justification des résultats seront prises en compte dans la notation.*
***Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.***

**Exercice 1**
A tout réel $\alpha$ donné tel que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on associe la fonction $f_\alpha$ telle que $f_\alpha(x) = \dfrac{(\alpha^2+1)x^2+\alpha^2-1}{(\alpha+1)x+\alpha-1}$. On désigne par $\mathcal{C}_\alpha$ la courbe représentative de $f_\alpha$.

(1) Montrer que $\mathcal{C}_\alpha$ admet deux asymptotes dont on précisera, pour chacune, une équation cartésienne.
(2) Soit $I_\alpha$ le point d'intersection de ces deux asymptotes.
  (a) Déterminer, en fonction de $\alpha$, les coordonnées de $I_\alpha$.
  (b) Que représente $I_\alpha$ pour la courbe $\mathcal{C}_\alpha$ ?.
  (c) Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, I_\alpha$ appartient à une courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = g(x)$ où $g$ est une fonction que l'on précisera.
  (d) Etudier la fonction $g$ et tracer $\mathcal{C}$.
(3) Etudier, suivant les valeurs de $\alpha$, les variations de $f_\alpha$.
(4) Représenter (dans un autre repère) les courbes $\mathcal{C}_{-2}, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$.

**Exercice 2**
(1) Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\tan x}{x}, \forall x \in ]0, \dfrac{\pi}{2}[$.
  (a) Déterminer $\lim\limits_{0^+} g$ et $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g$
  (b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire les variations de la fonction $g$.
  (c) Montrer que $g$ est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle que l'on précisera.
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n$, définie par :
$$f_n(x) = 2n\tan(x) - \tan(nx), x \in ]0, \frac{\pi}{2n}[$$
  (a) Déterminer $\lim\limits_{0^+} f_n, \lim\limits_{\frac{\pi}{2n}^-} f_n$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f_n(x)}{nx}$
  (b) En déduire que $f_n$ s'annule au moins une fois sur $]0, \frac{\pi}{2n}[$, pour $n \geq 2$
  (c) Soit $x_n \in ]0, \frac{\pi}{2n}[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ .
  En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\tan(nx_n)}{nx_n}$

# Test de présélection (Février 2021)

## Corrigé de l'épreuve

## Exercice I

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$, on pose $f_\alpha(x) = \dfrac{(\alpha^2+1)x^2+\alpha^2-1}{(\alpha+1)x+\alpha-1}$
et $C_\alpha$ la courbe représentative de $f$ dans un repère cartésien.

1. $f_\alpha$ est définie sur $D_{f_\alpha} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right\}$

   (a) Posons $x_\alpha = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$
   La droite $\Delta_\alpha : x = x_\alpha$ est asymptote verticale à $C_\alpha$ si $(\alpha^2+1)x_\alpha^2+\alpha^2-1 \neq 0$ c-a-d si $x_\alpha$ n'annule pas en même temps le numérateur et dénominateur de $f_\alpha(x)$.
   Or $(\alpha^2+1)x_\alpha^2+\alpha^2-1 = 2\alpha(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+2) \neq 0$ car $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$ et $\alpha^2+\alpha+2 \neq 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
   Donc la droite $\boxed{\Delta_\alpha : x = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ est une asymptote verticale $C_\alpha$.

   (b) On a $f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}x - \dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+1)}{(\alpha+1)^2} + \dfrac{(\alpha+1)^2(\alpha^2-1)+(\alpha-1)^2(\alpha^2+1)}{(\alpha+1)^2[(\alpha+1)x+\alpha-1]}$
   Soit $\boxed{D_\alpha : y = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}x - \dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+1)}{(\alpha+1)^2}}$

   On a alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(\alpha+1)^2(\alpha^2-1)+(\alpha-1)^2(\alpha^2+1)}{(\alpha+1)^2[(\alpha+1)x+\alpha-1]} = 0$
   La droite $D_\alpha$ est donc une asymptote oblique à $C_\alpha$

2. Soit $I_\alpha$ le point d'intersection de $\Delta_\alpha$ et $D_\alpha$

   (a) $I_\alpha$ a pour coordonnées $(x_\alpha, y_\alpha)$ avec
   $$\begin{cases} x_\alpha = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} \\ y_\alpha = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}x_\alpha - \dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+1)}{(\alpha+1)^2} = \dfrac{2(\alpha^2+1)(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2} \end{cases}$$
   D'où $I_\alpha\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\ ;\ \dfrac{2(\alpha^2+1)(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2}\right)$

(b) $I_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ représente le centre de symétrie de $C_\alpha$.

En effet, on peut vérifier que $f(x_\alpha + x) + f(x_\alpha - x) = 2y_\alpha,\ \forall x \in D_{f_\alpha}$

(c) Cherchons une relation entre $x_\alpha$ et $y_\alpha$ indépendante de $\alpha$.

On a $x_\alpha = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} \iff \alpha = \dfrac{1-x_\alpha}{1+x_\alpha}$

Donc $y_\alpha = \dfrac{2(\alpha^2+1)(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2} = \dfrac{2(\alpha^2+1)}{\alpha+1} \times \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} = \dfrac{2(\alpha^2+1)}{\alpha+1} x_\alpha$

$y_\alpha = 2x_\alpha \dfrac{\left[\left(\dfrac{1-x_\alpha}{1+x_\alpha}\right)^2 + 1\right]}{2}(1+x_\alpha) = \dfrac{2x_\alpha(1+x_\alpha^2)}{1+x_\alpha},\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$

Les coordonnées de $I_\alpha$ vérifient donc l'équation d'une courbe $C$

$$\boxed{y = \frac{2x(1+x^2)}{1+x} = g(x)}$$

(d) Etude de la fonction $g(x) = \dfrac{2(x^3+x)}{1+x}$

$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$g$ est continue et dérivable sur $D_g$ et $g'(x) = 2\ \dfrac{(3x^2+1)(1+x) - x^3 - x}{(1+x)^2}$

$g'(x) = \dfrac{2(2x^3+3x^2+1)}{(x+1)^2},\ \forall x \neq -1$

$g'(x)$ est de même signe que $2x^3 + 3x^2 + 1 = h(x)$, (pour $x \neq -1$)

On a $h'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$. D'où

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Erreur :** tel que $h(x_0) = 0$, on a $\begin{cases} h(x) & < & 0\ si\ x < x_0 \\ h(x) & > & 0\ si\ x > x_0 \end{cases}$

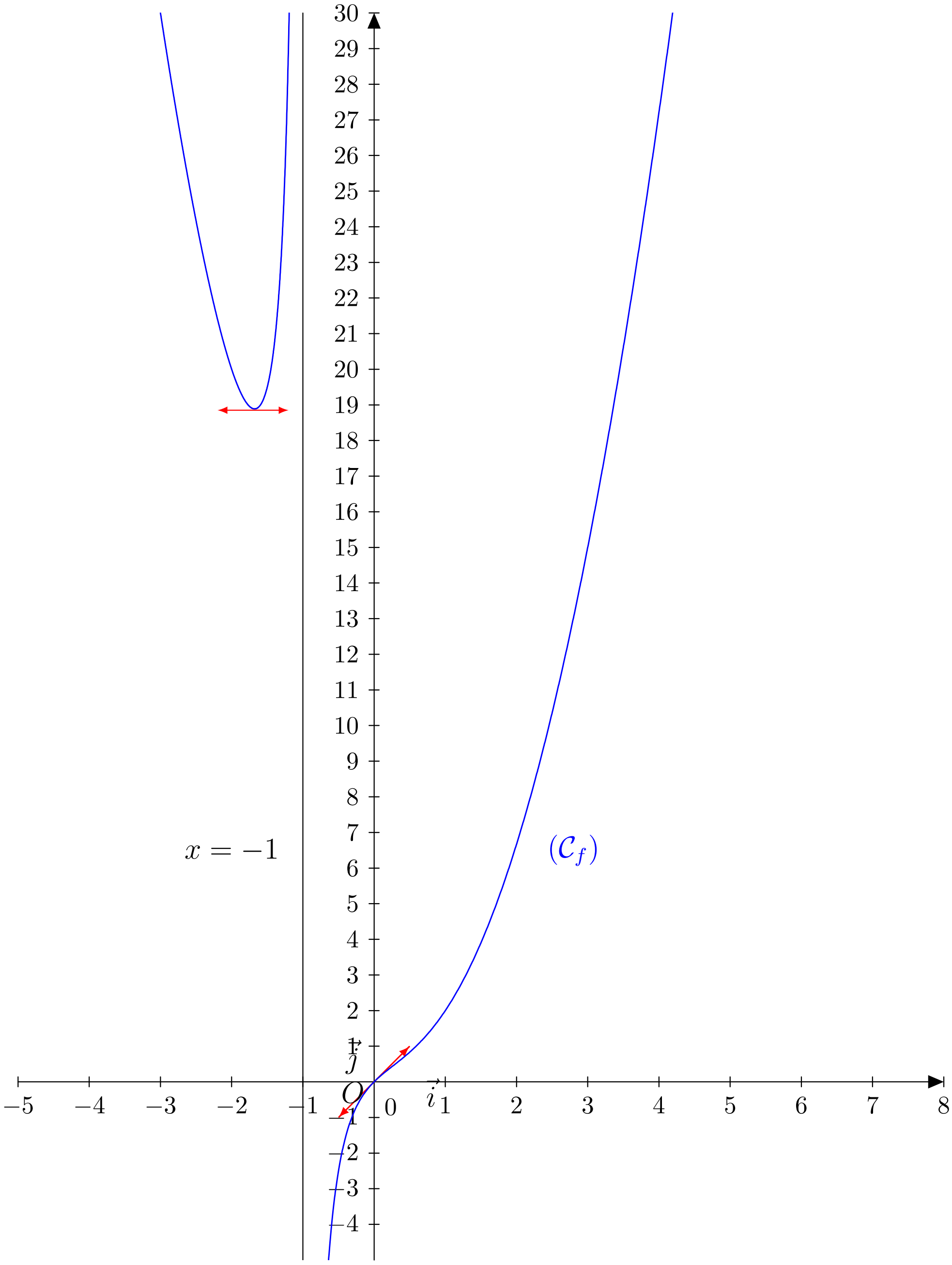
On en déduit le tableau de variation de $g_\alpha$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g(x_0)$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert -\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$C$ admet une asymptote verticale $\Delta : x = -1$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x^2+1)}{x+1} = \pm\infty$, donc $C$ admet une branche infinie de direction asymptotique suivant l'axe des $y$.

## **Courbe de la fonction $f$**




3. Variations de $f_\alpha$

   $f_\alpha$ est continue et dérivable sur $D_{f_\alpha}$. On a :

   $f'_\alpha(x) = \dfrac{(\alpha^2+1)(\alpha+1)x^2 + 2(\alpha^2+1)(\alpha-1)x - (\alpha+1)^2(\alpha-1)}{[(\alpha+1)x+\alpha-1]^2}$

   Donc $f'_\alpha(x) = 0 \Longleftrightarrow \Delta' = (\alpha^2+1)^2(\alpha-1)^2 + (\alpha+1)^2(\alpha^2+1)^2(\alpha^2-1)(\alpha^2+1) \geq 0$

   $$\Longleftrightarrow \Delta' = 2\alpha(\alpha^2+1)(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+2) \geq 0$$

   $\Delta'$ est de même signe que $\alpha(\alpha-1)$ car $2(\alpha^2+1)(\alpha^2+\alpha+2) > 0$

   D'où $\Delta' < 0 \Longleftrightarrow 0 < \alpha < 1$ et $\Delta' > 0 \Longleftrightarrow \alpha < 0$ ou $\alpha > 1$

$\boxed{\text{Etude du cas : } 0 < \alpha < 1}$

On a $\Delta' < 0$, donc $f'_\alpha(x) > 0$ car $(\alpha^2 + 1)(\alpha + 1) > 0$

D'où le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_\alpha(x)$ | | $+$ | $\|$ | $+$ | |
| $f_\alpha(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty \ \| \ -\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\boxed{\text{Etude du cas : } -1 < \alpha < 0}$

On a $\Delta' > 0$ et $(\alpha^2 + 1)(\alpha + 1) > 0$. Donc $f'_\alpha(x) > 0$ s'annule en deux points $x'_0$ et $x''_0$ tels que $x'_0 < x_\alpha < x''_0$ (pour raison de symétrie)

D'où le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x'_0$ | | $x_\alpha$ | | $x''_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_\alpha(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_\alpha(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f_\alpha(x'_0)$ | $\searrow$ | $-\infty \ \| \ +\infty$ | $\searrow$ | $f_\alpha(x''_0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

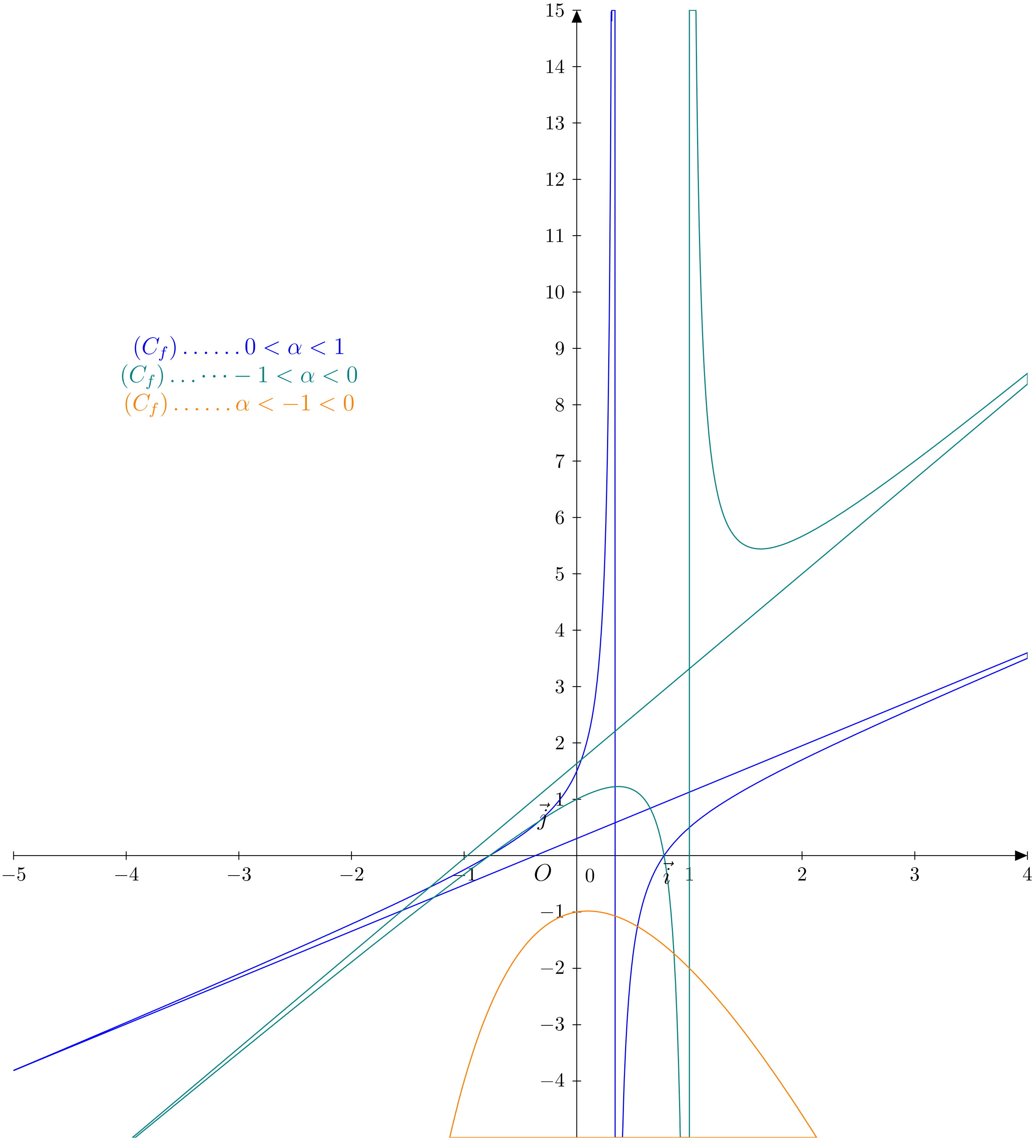
$\boxed{\text{Etude du cas : } \alpha < -1}$

On a $\Delta' > 0$ et $(\alpha^2 + 1)(\alpha + 1) < 0$. Donc $f'_\alpha(x)$ s'annule en deux points $x'_0$ et $x''_0$ tels que $x'_0 < x_\alpha < x''_0$ (pour raison de symétrie)

D'où le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x'_0$ | | $x_\alpha$ | | $x''_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_\alpha(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_\alpha(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f_\alpha(x'_0)$ | $\nearrow$ | $+\infty \; \| \; -\infty$ | $\nearrow$ | $f_\alpha(x''_0)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**Courbe de la fonction $f$**




# Exercice II

1. $g(x)=\dfrac{\tan x}{x},\ \forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g = +\infty}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x & = & \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g = +\infty$$

(b) $g$ est continue et dérivable $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et

$g'(x) = \dfrac{x(1+\tan^2 x) - \tan x}{x^2} = \dfrac{x}{x^2\cos^2 x} - \dfrac{\sin x}{x^2 \cos x} = \dfrac{x - \sin x \cos x}{x^2\cos^2 x} = \dfrac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$.

Comme $x > 0$, donc $2x > \sin 2x$. D'où $g'(x) > 0,\ \forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent $g$ est strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(c) $g$ est continue et strictement monotone sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $g$ réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right) = ]1, +\infty[$

2. Soit $n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = 2n\tan(x) - \tan(nx),\ x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2n}\right[$

(a) On a $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \tan x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \tan(nx) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0}$

(b) On a $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2n}^-} \tan x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2n}^-} \tan(nx) = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2n}^-} f_n(x) = -\infty}$

(c) On a $\dfrac{f_n(x)}{x} = \dfrac{2n\tan(x) - \tan(nx)}{nx} = 2\dfrac{\tan x}{x} - \dfrac{\tan(nx)}{nx},\ \forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2n}\right[$ et

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan(nx)}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)}{nx} = 1}$$

3. On déduit de cette dernière limite que $f_n(x) > 0$ quand $x \approx 0^+$.

   Or $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2n}^-} f_n = -\infty \Rightarrow f_n(x) < 0$ quand $x \approx \dfrac{\pi}{2}^-$

   Donc $f_n$ change de signe sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2n}\right[$ et est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2n}\right[$.

   D'où : $\exists x_n \in \left]0, \dfrac{\pi}{2n}\right[ / f_n(x_n) = 0$

4. $\begin{cases} 0 < x_n < \dfrac{\pi}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0^+}$

   $f_n(x_n) = 0 \iff 2n\tan(x_n) - \tan(nx_n) = 0 \iff 2n\tan(x_n) = \tan(nx_n)$.

   Donc $\dfrac{\tan(nx_n)}{nx_n} = \dfrac{2n\tan(x_n)}{nx_n} = 2\dfrac{\tan(x_n)}{x_n}$

   Par suite, on a :

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tan(nx_n)}{nx_n} = \lim\limits_{x_n\to 0^+} \dfrac{\tan(nx_n)}{nx_n} = 1$

   D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tan(nx_n)}{nx_n} = 2}$

# Exercice III

On pose $C(n) = C_{2n}^{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

1. $C_{(n+1)} = C_{2n+2}^{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{[(n+1)]^2} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 \times (n!)^2} = 4\dfrac{2n+1}{2n+2}C(n)$

   En posant $\boxed{A = \dfrac{2n+1}{2n+2}, \text{ on a alors } C(n+1) = 4AC(n)}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $(C_n) > 0$ et $\dfrac{C(n+1)}{C(n)} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} > 1$

   donc $C(n+1) > C(n), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $C$ est strictement croissante

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
C(n) = \frac{4(2n-1)}{n} C(n-1) &= \frac{4(2n-1)}{2n} \times \frac{4(2n-3)}{2n-2} C(n-2) \\
&= \frac{4(2n-1)}{2n} \times \frac{4(2n-3)}{2n-2} \times \frac{4(2n-4)}{2n-4} C(n-3) \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \frac{4(2n-1)}{2n} \times \frac{4(2n-3)}{2n-2} \times \frac{4(2n-5)}{2n-4} \times \cdots \times \frac{4\times 3}{4} \; \frac{4 \times 1}{2} C(0) \\
&= \frac{4^n(2n-1)(2n-3)(2n-5) \times \cdots \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 4 \times 2}, \quad C(0) = C_0^0 = \frac{0!}{(0!)^2} = 1 \\
&= \frac{2^{2n}(2n-1)(2n-3) \times \cdots \times 5 \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 6 \times 4 \times 2}
\end{aligned}$$

4. On a $\dfrac{C(n)}{2^{2n}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6} \times \cdots \times \dfrac{2n-3}{2n-2} \times \dfrac{2n-1}{2n} < 1$

   donc $C(n) < 2^{2n}$

   On a aussi

   $C(n) = \dfrac{2^{2n}}{2n} \times \underbrace{\dfrac{2n-1}{2n-2} \times \dfrac{2n-3}{2n-4} \times \cdots \times \dfrac{5}{4} \times \dfrac{3}{2}}_{>1} > \dfrac{2^{2n}}{2n}$

   D'où $\boxed{\dfrac{2^{2n}}{2n} < C(n) < 2^{2n}}$

5. D'aprés 1) on a $C(n) = 4\dfrac{(2n-1)}{2n} C(n-1), \forall n \in \mathbb{N}^*$

   Donc $\left\{\begin{array}{lll} 0 & < & C(n) < 4C(n-1) \\ 0 & < & C(n-1) < 4C(n-2) \\ 0 & < & C(n-2) < 4C(n-3) \\ & \vdots & \\ 0 & < & C(3) < 4C(2) \\ 0 & < & C(2) < 4C(1) \\ 0 & < & C(1) < 4C(0) \end{array}\right.$

   Produit membre à membre, par simplification :

   $C(n) < 4^{n-1} \times 2 \; C(0) = 2^{2n-1} < 2^{2n}$

   D'où $\boxed{\dfrac{2^{2n}}{2n} < C(n) < 2^{2n-1}}$

# Exercice IV

Soient les polynômes $P_n$ et $L_n$ définis par :

$P_0(x) = 1,\ P_n(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(x-1)^n$ et $L_n(x) = P_n^{(n)}(x),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. $P_0(x) = 1 \Rightarrow L_0(x) = P_0^{(0)}(x) = \boxed{P_0(x) = 1}$

   $P_1(x) = x(x-1) = x^2 - x \Rightarrow L_1(x) = P_1'(x) = \boxed{2x-1}$

   $P_2(x) = \dfrac{1}{2}x^2(x-1)^2 = \dfrac{1}{2}(x^4 - 2x^3 + x^2) \Rightarrow L_2(x) = P_2''(x) = \dfrac{1}{2}(4x^3 - 6x^2 + 2x)'$

   $L_2(x) = \dfrac{1}{2}(12x^2 - 12x + 2) = \boxed{6x^2 - 6x + 1}$

   $P_3(x) = \dfrac{1}{6}x^3(x-1)^3 = \dfrac{1}{6}(x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3)$

   $\Rightarrow L_3(x) = \dfrac{1}{6}(6x^5 - 15x^4 + 12x^3 - 3x^2)'' = \dfrac{1}{6}(30x^4 - 60x^3 + 36x^2 - 6x)'$

   $\Rightarrow L_3(x) = \dfrac{1}{6}(130x^3 - 180x^2 + 72x - 6)$

   $\Rightarrow \boxed{L_3(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1}$

2. $P_n(1-x) = \dfrac{1}{n!}(1-x)^n(1-x-1)^n = \dfrac{1}{n!}(1-x)^n(-x)^n = \dfrac{1}{n!}(-1)^n(x-1)^n(-1)^n x^n$

   donc $\boxed{P_n(1-x) = \dfrac{1}{n!}(x-1)^n x^n = P_n(x)}$

3. $\Big[P_n(1-x)\Big]^{(n)} = P_n^{(n)}(x)$ or $\Big[P_n(1-x)\Big]^{(n)} = (-1)^n P_n^{(n)}(1-x)$

   donc $(-1)^n P_n^{(n)}(1-x) = P_n^{(n)}(x)$

   c-a-d $\boxed{P_n^{(n)}(1-x) = (-1)^n P_n^{(n)}(x) \Longleftrightarrow L_n(1-x) = (-1)^n L_n(x)}$

4. $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(x-1)^n = \dfrac{1}{n!}x^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ (Formule de binôme)

   $$P_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{2n-k}$$

   Donc $P_n^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k A_{2n-k}^{n} x^{2n-k-n}$

   $$P_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k A_{2n-k} x^{n-k}$$

   $$\boxed{P_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n-k)!}{k![(n-k)]^2} x^{n-k} = L_n(x)}$$

   $$L_n(x) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n - \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n-1)!}x + (-1)^n\frac{n!}{n!}$$

$$\boxed{L_n(x) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n - \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n(n+1)nx + (-1)^n}$$

D'où $d^\circ L_n(x) = d^\circ\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n\right] = \boxed{n}$

Coefficient dominant de $L_n(x)$ est donc $\boxed{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

Terme constant : $\boxed{L_n(0) = (-1)^n}$

Par ailleurs, on a $L_n(1) = (-1)^n P_n^{(n)}(0) = (-1)^n L_n(0) = (-1)^n \times (-1)^n = \boxed{1}$

5. $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(x-1)^n$

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= \frac{1}{n!}\left[nx^{n-1}(x-1)^n + nx^n(x-1)^{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{n!}nx^{n-1}(x-1)^{n-1}(x-1+x) \\
&= n(2x-1) \times \frac{1}{n!}x^{n-1}(x-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

donc $(x^2-x)P_n'(x) = x(x-1)P_n'(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(x-1)^n \times (x-1)$

$$\boxed{(x^2-x)P_n'(x) = n(2x-1)P_n(x)}$$

Appliquons les formules de Leibniz sur les fonctions $x \mapsto x^2 - x$ et $x \mapsto P_n'(x)$ sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\left[(x^2-x)P_n'(x)\right]^{(n+1)} = n\left[(2x-1)P_n(x)\right]^{(n+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(x^2-x)^{(k)}P_n^{(n+1-k+1)}(x)C_{n+1}^k = n\sum_{k=0}^{n+1}(2x-1)^{(k)}P_n^{(n+1-k)}(x)C_{n+1}^k$$

$$C_{n+1}^0(x^2-x)^{(0)}P_n^{(n+2)}(x) + C_{n+1}^1(2x-1)P_n^{(n+1)}(x) + C_{n+1}^2(2)P_n^{(n)}(x) + 0 + \cdots$$

$$= n\left[(2x-1)P_n^{(n+1)}(x)C_{n+1}^0 + 2C_{n+1}^1P_n^{(n)}(x) + 0 + \cdots\right]$$

donc $(x^2-x)(P_n^{(n)})''(x) + (n+1)(2x-1)(P_n^{(n)})'(x) + (n+2)(n+1)P_n^{(n)}(x)$

$= n(2x-1)L_n'(x) + 2n(n+1)L_n(x)$

$$\boxed{\iff (x^2-x)L_n''(x) + (2x-1)L_n'(x) - n(n+1)L_n(x) = 0}$$