

Somme IV 5pts

1) Tirages simultanés de 3 jetons parmi 7

a) Valeurs possibles de S = somme des nombres inscrits sur les 3 jetons tirés

S prend les valeurs : 300, 400, 500 et 600. 1

↳ (i) Pour obtenir $S = 400$, il faut 2 jetons marqués "100" parmi les 4 de l'urne U_1 et un jeton marqué "200" parmi les 3 jetons de U_2 .
d'où $C_4^2 \times C_3^1 = \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} \times 3 = \boxed{18}$ 1

(ii) $S = 500$ Un jeton marqué "100" de U_1 et deux jetons marqués "200" de U_2 .
d'où $C_4^1 \times C_3^2 = 4 \times 3 = \boxed{12}$ 1

2) a) Le nombre total de tirages (éventuels) est
 $\text{Card}(U_1 \times U_2) = \text{Card } U_1 \times \text{Card } U_2 = 7 \times 5 = \boxed{35}$ 1

↳ 2 jetons portant le même numéro;
 A : 2 jetons portant chacun le n° 100
ou B : 2 jetons portant chacun le n° 200
avec $A \cap B = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \text{donc } \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card } A + \text{Card } B \\ &= (4 \times 3) + (3 \times 2) \\ &= 12 + 6 \\ &= \boxed{18} \end{aligned} \quad \text{1}$$

b) Soit $l = \lim(V_n) = \lim(W_n)$

On a donc $V_n \leq l \leq W_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Comme $W_n - V_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc pour que $V_n \leq l \leq V_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n}}$

c-à-d. $\left(n \geq 10^6 \right)$, il suffit que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 10^{-3}$

9) $(\sqrt{n} \leq u_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_n}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc on a $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R}$, alors on a $0 \leq L \leq 1$

Or $\frac{u_n}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{V_n}{n} \rightarrow 0 - \frac{l}{\infty} = 0$

Donc $L = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$

10) $u_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{u_n}{\sqrt{n}} \geq 1$

Donc on a $L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$, alors on a $L' \geq 1$

Or $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = 2 - \frac{V_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 2 - \frac{l}{\infty} = 2 \geq 1$

$L' = 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$

3) a) $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{2}{\sqrt{n+k}}, n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{n}} (u_{2n} - u_n)$

d'où $S_n = u_{2n} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{u_{2n}}{\sqrt{n}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2} \frac{u_{2n}}{\sqrt{2n}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{2} \times 2 = 2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2 (\sqrt{2} = 1)$

Exercice III (5pts) $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 = 1, u_n = u_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$

1) a) On a $\sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=2}^n u_{k-1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

c - n - 4

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Comme $k \leq n$, donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

Comme $k \geq 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$ et $u_n \leq \sum_{k=1}^n 1 = n$

Donc

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$

2) $v_n \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{cases} v_n = 2\sqrt{n} - u_n \\ w_n = 2\sqrt{n+1} - u_n \end{cases}$$

$$v_{n+1} - v_n = 2\sqrt{n+1} - u_{n+1} - 2\sqrt{n} + u_n$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\sqrt{n+1}} \geq 0$$

(v_n) est croissante

$$w_{n+1} - w_n = 2\sqrt{n+2} - u_{n+1} - 2\sqrt{n+1} + u_n = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})\sqrt{n+1}} < 0$$

(w_n) est décroissante

$$w_n - v_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Concluez: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - v_n) = 0$
 $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ sont adjacents

φ_n restreinte à $]-\infty, 0]$ est continue et strictement monotone, donc réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $]-\infty, 1]$. Comme $\begin{cases} \varphi_n(-1) = -4n \\ \varphi_n(0) = 1 \end{cases}$, donc $\varphi_n(-1) \times \varphi_n(0) < 0$

Par conséquent, il existe une unique $\varphi_n \in]-1, 0[$ / $\varphi_n(\varphi_n) = 0$

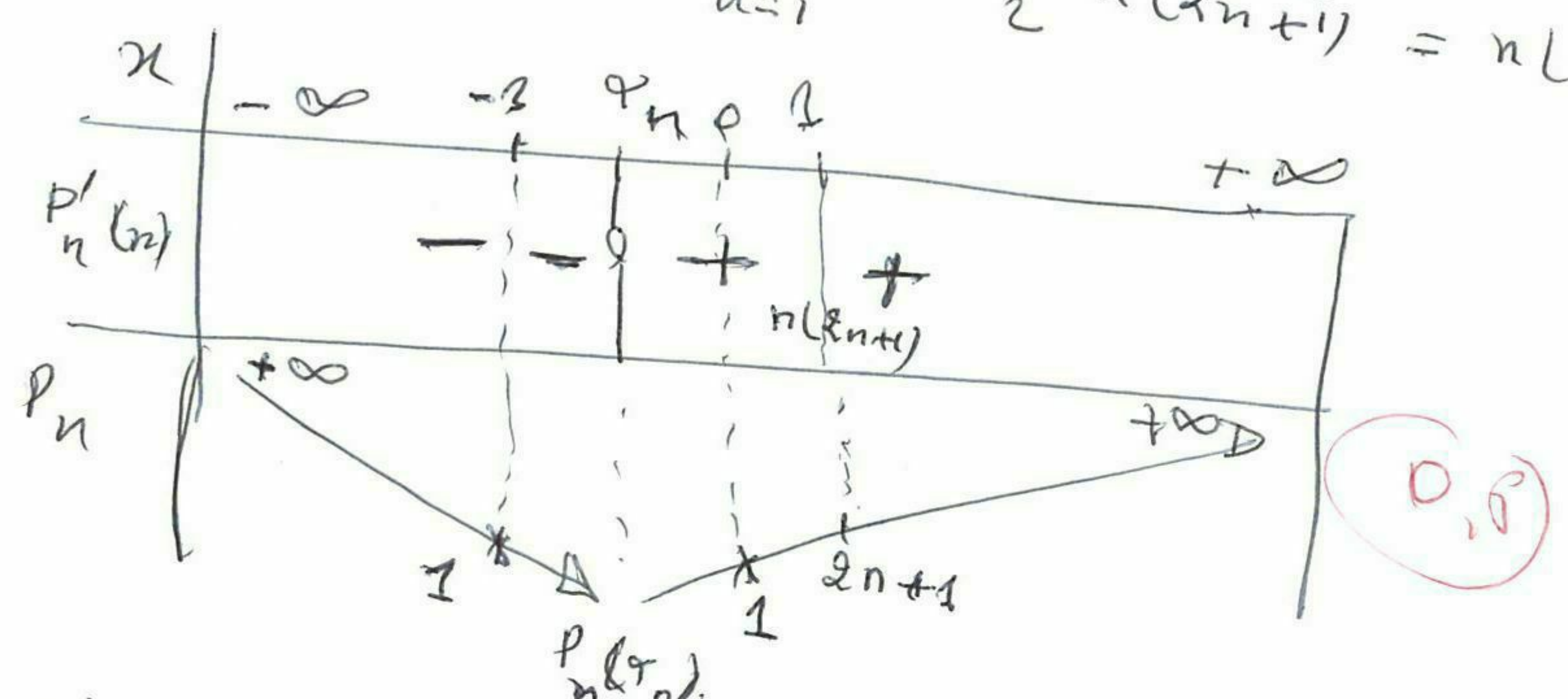
3) a) $P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{2n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ 2n+1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Donc si $x \neq 1$, on a $P'_n(x) = \frac{(2n+1)x^{2n} - (x^{2n+1} - 1)}{(x-1)^2}$

$P'_n(1) = \frac{(1+2n)2n - (2n+1)}{(1-1)^2} = \frac{(2n+1)2n}{(1-1)^2} = \frac{(2n+1)2n}{0}$

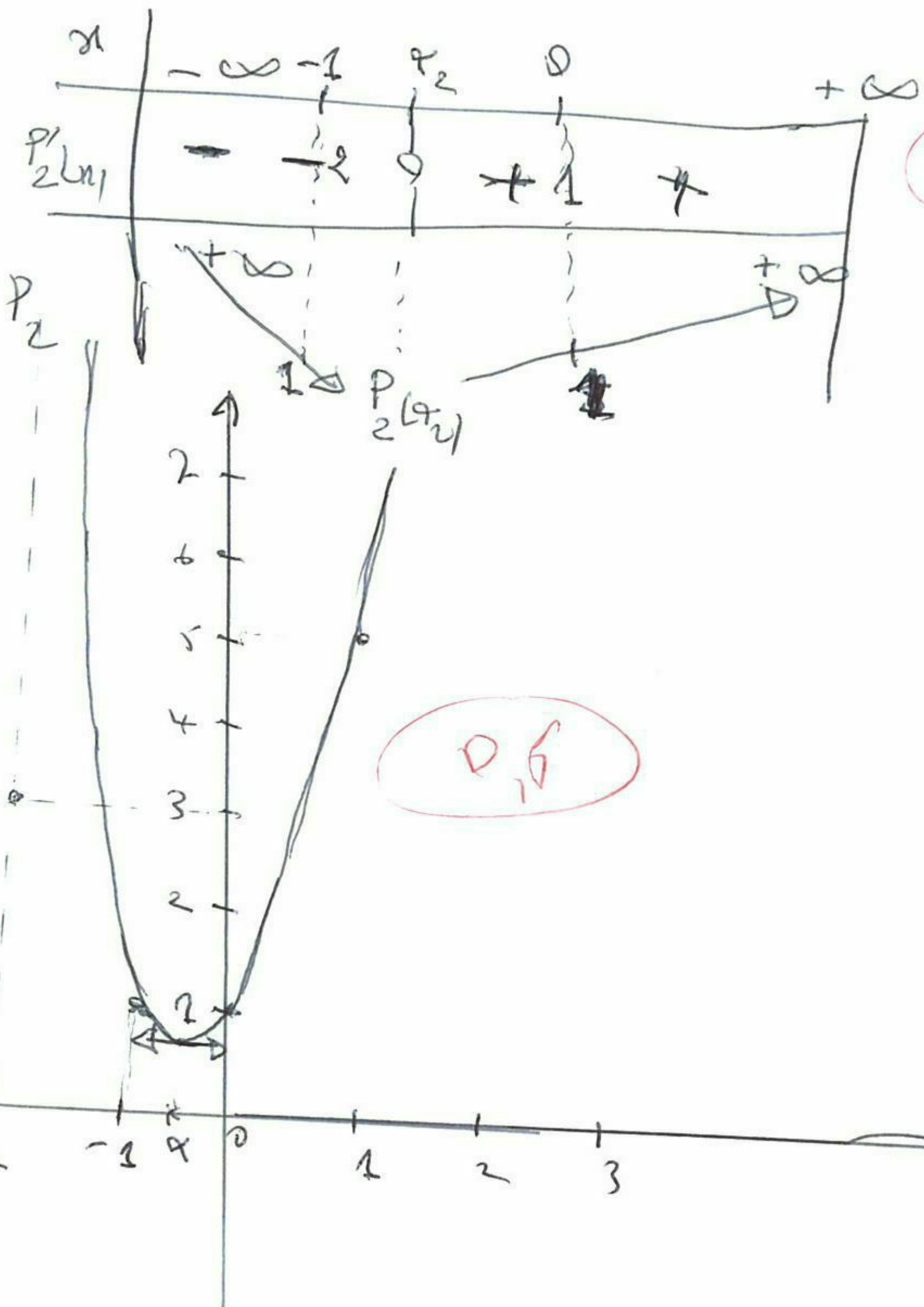
$P'_n(x) = \frac{2n x^{2n+1} (x-1)^2 - (2n+1)x^{2n}}{(x-1)^2} = \frac{\varphi_n(x)}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$

$P'_n(1) = \sum_{k=1}^{2n} k(1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2} 2n(2n+1) = n(2n+1)$



D'après le TV de P_n , on a $P_n(x) \geq P_n(\varphi_n)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Comme $-1 < \varphi_n < 0$, donc $P_n(\varphi_n) = \frac{\varphi_n^{2n+1} - 1}{\varphi_n - 1}$ avec $\begin{cases} \varphi_n^{2n+1} < 0 \\ \varphi_n - 1 < 0 \end{cases}$, donc $P_n(\varphi_n) > 0$.
 D'où : $\boxed{P_n(x) \geq P_n(\varphi_n) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}}$

On $\mathbb{R}$ a l'axe



(0,2)

$$p'_2(-1) = p'_2(0) = -2 < 0$$

$$-1 < x_2 < 0$$

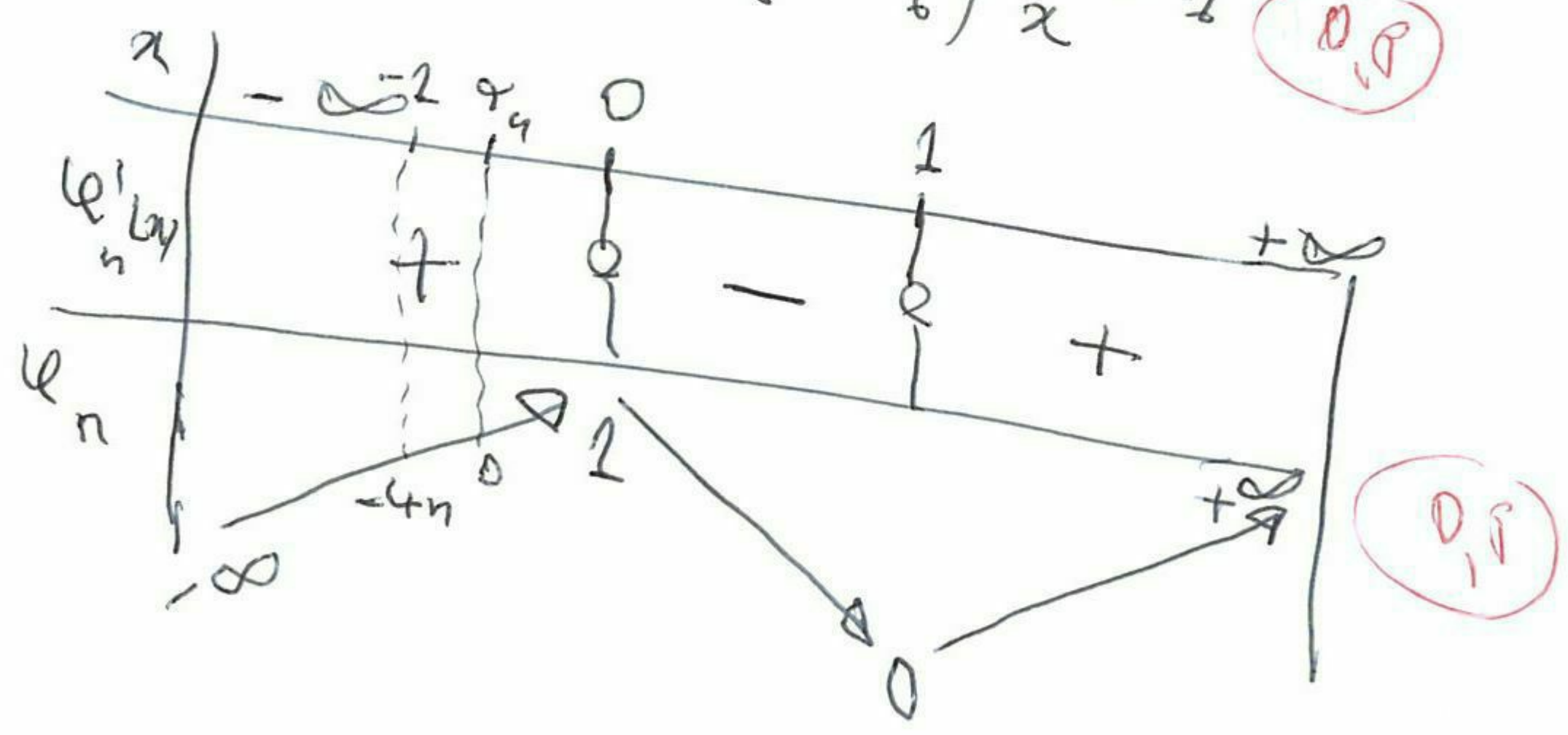
(0,6)

2) $\varphi_n(x) = x^n x^{x_{n+1}} - (x_{n+1}) x^{x_n} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

a) $\varphi'_n(x) = x^n (x_{n+1}) x^{x_n} - x^n (x_{n+1}) x^{x_n-1}$

$\varphi'_n(x) = x^n (x_{n+1}) (x-1) x^{x_n-1}$

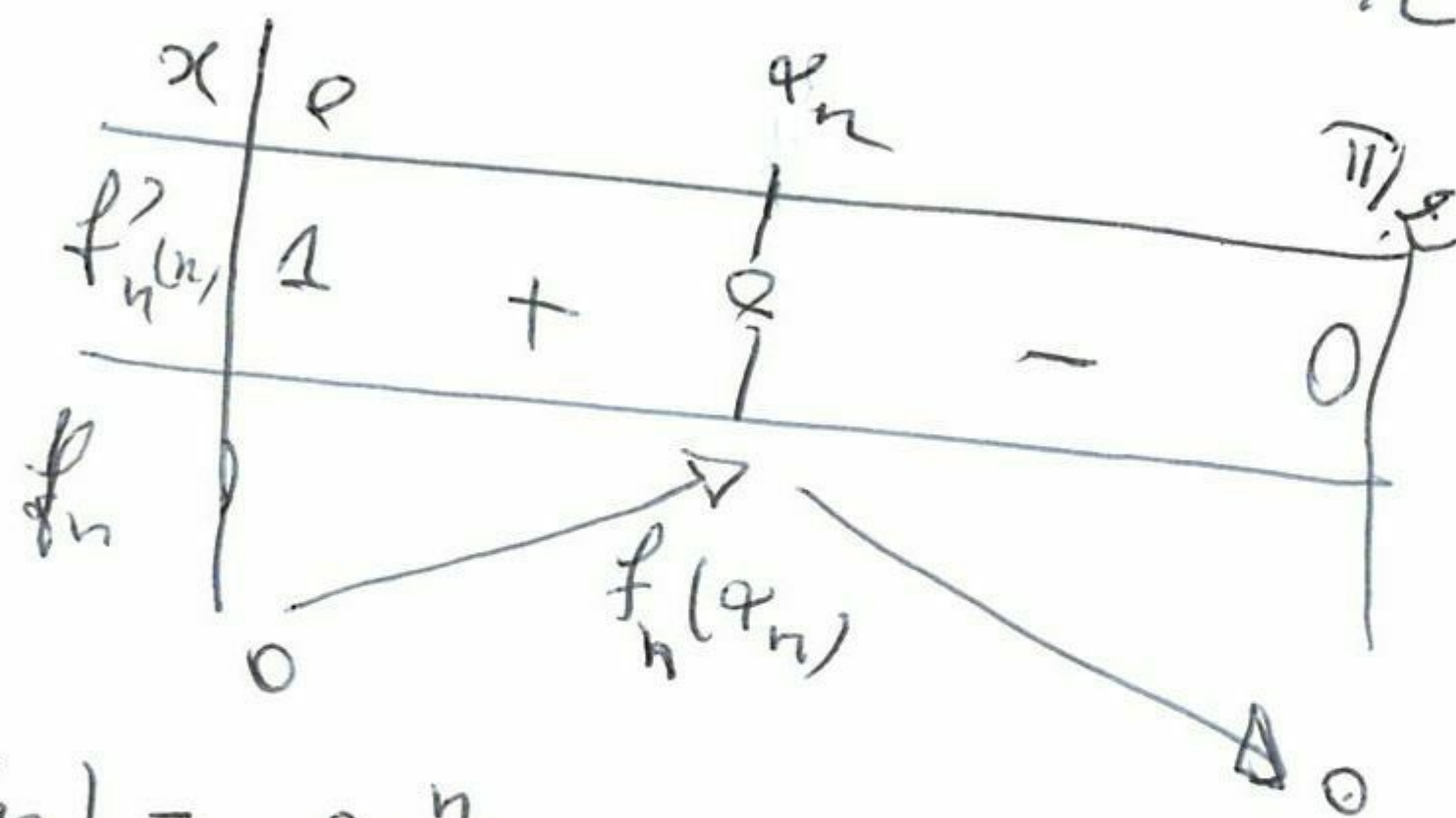
On obtient:



(0,8)

(0,8)

On a donc) $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/2 \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ 0 \leq x \leq \pi/2 \end{cases}$



$(0, \pi/2)$

h) $f_n(x_n) = \cos^n(x_n) \sin(x_n)$ et $\sin(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
 donc $\cos(x_n) = \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$

$(0, \pi/2)$

donc $f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2} \times \frac{1}{(n+1)^{1/2}} = \frac{n^{n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2}} = y_n$

$\frac{n^{n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2}} = y_n$

On a $0 \leq y_n \leq \sin(x_n)$, car $\cos^n(x_n) \in [0, 1]$
 donc $0 \leq y_n \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$, donc, par théorème des gendarmes,
 on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$

$(0, \pi/2)$

Exercice II 5pts

$n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n x^k, \forall x \in \mathbb{R}$

1) $P_2(x) = 1 + \sum_{k=1}^2 x^k = 1 + x + x^2$

$P'_2(x) = 1 + 2x + 2x^2$

$P''_2(x) = 2 + 4x$

$\Delta = 4 - 24 < 0$

donc $P''_2 > 0$, c-à-d P'_2 est (strictement) croissante

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} P'_2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P'_2 = +\infty$

donc $\exists! x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $P'_2(x_2) = 0$

2) a) - si n est pair, alors f_n a la même parité que $\sin$, donc f_n est impair.

- si n est impair, alors f_n est paire, comme produit de deux fonctions impaires.

f_n est périodique de période 2π . (0,1)

c) $f_n(\frac{\pi}{2} - x) = \cos^n(\frac{\pi}{2} - x) \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin^n x \cos x$

ou $\begin{cases} \sin^n x = -\cos(\frac{\pi}{2} + x) \\ \cos^n x = \sin(\frac{\pi}{2} + x) \end{cases}$

donc $f_n(\frac{\pi}{2} - x) = [-\cos(\frac{\pi}{2} + x)]^n \sin(\frac{\pi}{2} + x) = (-1)^n f_n(\frac{\pi}{2} + x)$

d) La périodicité nous permet d'étudier $x \in [\pi, 2\pi]$. La parité réduit cet intervalle à $[0, \pi]$. La relation $f_n(\frac{\pi}{2} - x) = \pm f_n(\frac{\pi}{2} + x)$ permet de limiter l'étude à $[0, \pi/2]$.

On utilise la symétrie géométrique : symétrie par rapport à Δ : $x = \pi/2$; symétrie centrale par rapport à l'origine $O(0,0)$ dans des coordonnées, et enfin, la relation par rapport au vecteur $2\pi \vec{i}$, où $\vec{i} \in \mathbb{R}^2$.

2) a) variations de f_n en $[0, \pi/2]$ f_n est dérivable (en $\mathbb{R}$) et $f'_n(x) = -n \sin^2 x \cos^{n-1} x + \cos^{n+1} x$

$f'_n(x) = (\cos^2 x - n \sin^2 x) \cos^{n-1} x$
 $f'_n(x) = [1 - (n+1) \sin^2 x] \cos^{n-1} x$ (0,1)

Test de Préselection

Corrige' du sujet de Mathématiques.

Exercice I

5pts

$n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \cos^n(x) \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 e_n courbe représentative de f_n dans le plan.

1) $f_0(x) = \sin(x)$,
 $f_2(x) = \cos^2(x) \sin(x)$

$f_2(x) = \cos^2(x) \sin(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

② f_0 et f_2 sont connues.

③ Étudions f_2 fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période égale à 2π . Elle se simplifie. On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$. De plus on a $f(\frac{\pi}{2} - x) = f(\frac{\pi}{2} + x)$ donc, par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ on peut se limiter à $[0, \pi/2]$.

$f_2'(x) = -2 \cos(x) \sin^2(x) + \cos^3(x) = (\cos(x))(1 - 3 \sin^2(x))$

0,5

x	0	$\pi/2$	$\pi/2$
$f_2'(x)$	1	+	-
$f_2''(x)$	0	$f_2'(x)$	0

$f_2'(x) = 0$
 $x \in [0, \pi/2]$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \pi/2 \\ \text{ou} \\ \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \leq x \leq \pi/2 \end{cases}$

On a $f_2(x) = \cos^2(x) \sin(x)$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 donc $f_2(x) = (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

